

Problem 5. Obciążona obręcz

Godło: WAMPAK

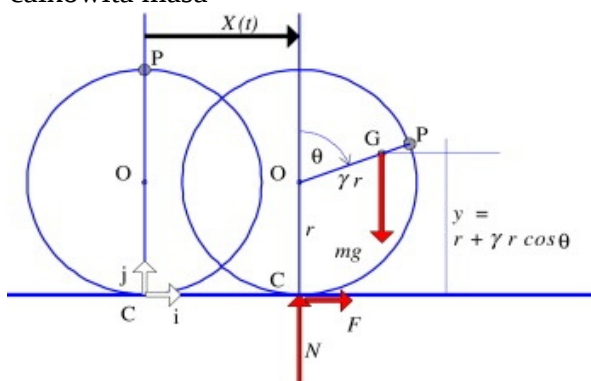
Opracował: Adam Małagowski

Treść zadania

Przymocuj mały ciężarek do wewnętrznej strony obręczy i pchnięciem wprowadź ją w ruch toczący. Zbadaj ruch obręczy.

Analiza teoretyczna problemu

Rozważmy idealnie okrągłą obręcz o pewnej masie m_l toczącą się po płaszczyźnie. Zakładając brak jakichkolwiek oporów ruchu zauważamy, że jej ruch jest jednostajny. Przytwierdzając jednak ciężarek do wewnętrznej strony obręczy można zauważyć, że zmieni się położenie środka ciężkości obiektu. W związku z tym wraz z ruchem toczącym obręczy będzie się on albo wznosił albo opadał. Będzie to miało wpływ na zmiany prędkości i przyspieszenia obiektu. Zmiany te będą miały charakter cykliczny. Założyliśmy więc, że **ruch obciążonej obręczy jest ruchem niejednostajnym, gdzie przyspieszenie będzie przyjmowało zarówno wartości dodatnie jak i ujemne**. Należy także dodać, że w eksperymentach wystąpią opory związane z ruchem, takie jak tarcie toczne i opór powietrza. Poniższa ilustracja przedstawia ruch obciążonej obręczy. Zakładając, że masa obręczy to m_h , a masa ciężarka przytwierdzonego w punkcie P to m_p , całkowita masa



obiektu $m = m_h + m_p$ możemy obliczyć odległość punktu G od punktu O, które oznaczymy jako γr , gdzie γ jest pewnym współczynnikiem obliczanym za pomocą wzoru:

$$\gamma = \frac{m_p}{m}$$

Ilustracja 1: Siły działające na obręcz, której środek ciężkości znajduje się w punkcie G

Należy teraz zastanowić się nad energią tego obiektu podczas ruchu toczącego. W momencie, gdy punkt G znajduje się w najwyższym możliwym położeniu, obiekt posiada maksymalnie dużą możliwą energię potencjalną i najmniejszą energię kinetyczną.

W momencie, gdy środek ciężkości osiąga najniższe możliwe położenie (możliwie najbliższe do podłoża) cała energia potencjalna jest przekształcona w energię kinetyczną (zgodnie z zasadą zachowania energii). Biorąc pod uwagę tarcie toczne i opór powietrza możemy również przypuścić, że **za każdym następnym obrotem gdy wysokość środka ciężkości osiągnie swoje maksimum ($r + \gamma r$) szybkość będzie coraz mniejsza**. Całkowitą energię E_r toczącej się obręczy możemy określić wzorem:

$$E_r = mgr(1 + \omega^2)(1 + \gamma \cos \theta)$$

ω określa prędkość kątową poruszającej się obręczy.

Analizując powyższą zależność można zauważyć, że prędkość kątowa osiąga największą wartość dla najmniejszej możliwej wartości wyrażenia $(1 + \gamma \cos \theta)$, czyli dla $\theta = \Pi$ rad. Potwierdza to nasze założenie, że **energia kinetyczna (a co za tym idzie - także prędkość) toczącej się obręczy jest największa w momencie, gdy środek ciężkości znajduje się najniżej**.

Następną rzeczą, którą zajęliśmy się podczas analizy teoretycznej, to zależność maksymalnego przyspieszenia od maksymalnej prędkości osiąganej przez obręcz. Pierwsze, co możemy założyć, to że **niezależnie od średniej prędkości obręczy różnica między maksymalną a minimalną prędkością chwilową będzie taka sama**. Wiąże się to z faktem, że energia

potencjalna w momencie gdy punkt G jest na najwyższej możliwej wysokości jest stałą i wynosi

$E_p = mg2 \gamma r$. Podczas ruchu w dół jest ona zamieniana na energię kinetyczną. Tego samego założenia nie możemy zastosować jednak do przyspieszenia. Chociaż przewidujemy, że zmiana prędkości pomiędzy punktem gdy $\theta=0^\circ$ i gdy $\theta=180^\circ$ będzie niezależna od prędkości, to prędkość ta wpływa jednak na szybkość, z jaką położenie środka ciężkości zmienia się. W związku z tym zakładamy, że **największa maksymalna wartość przyspieszenia będzie osiągnięta dla największych prędkości poruszania się obręczy**. Wszystkie te założenia zostały zweryfikowane za pomocą doświadczenia opisanego poniżej.

Opis doświadczenia

Do przeprowadzenia doświadczenia użyto:

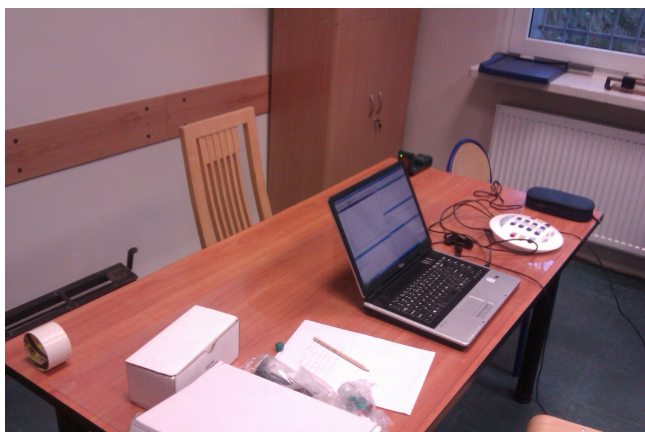
- obręczy wykonanej z tekturowej nieelastycznej rolki po taśmie klejącej o masie 25,0 g oraz kawałka plasteliny o masie 5,0 g przytwierdzonego do wewnętrznej strony rolki. Obiekt ma średnicę 81 mm i grubość 49 mm.
- Zestawu CoachLab II+ z ultradźwiękowym miernikiem odległości
- komputera z zainstalowanym programem Coach 6 do obsługi powyższego urządzenia
- płaskiego blatu o długości około 1,3 m
- plastikowej podkładki na biurko

Za pomocą tych urządzeń i przedmiotów zmierzaliśmy zależność odległości obręczy od miernika od czasu. Obręcz toczyła się w kierunku urządzenia. Program Coach 6 umożliwił także wykonanie wykresu pierwszej i drugiej pochodnej po czasie, a więc wykresu zależności prędkości od czasu i przyspieszenia od czasu. Pomiar odległości odbywał się z częstotliwością 50 pomiarów na sekundę. Producent zastrzega sobie, że dla odległości mniejszych niż 20 cm urządzenie może być nieprecyzyjne. Jako że odległość zmniejszała się w czasie, to pomiary prędkości będą ujemne na wykresie. Obręcz była wprawiana w ruch przy pomocy dłoni. Plastikowa podkładka pomagała w poprowadzeniu jej po odpowiednim torze aby nie skręcała na boki.



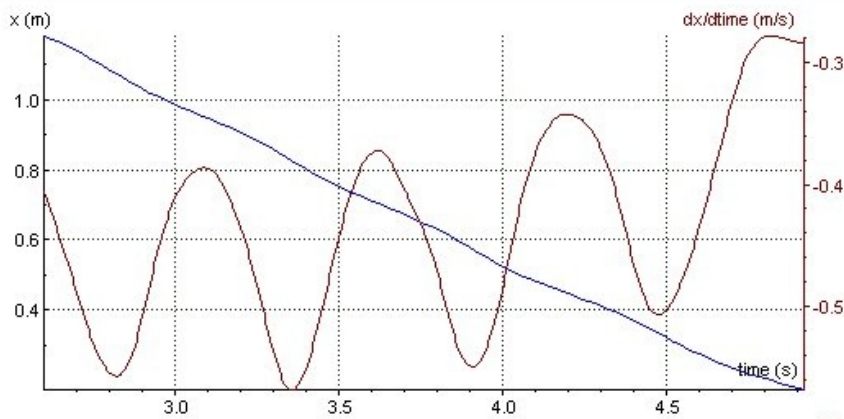
Ilustracja 2: Obręcz użyta do doświadczenia oraz ultradźwiękowy miernik odległości

Wyniki doświadczenia



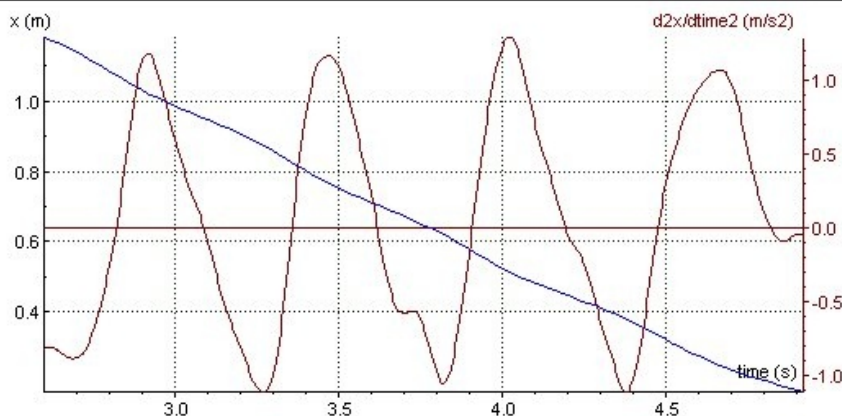
Ilustracja 3: Przeprowadzanie doświadczenia

Wykonaliśmy pomiary dla różnych prędkości poruszania się obręczy turlając ją raz mocniej, raz słabiej. W rezultacie otrzymaliśmy 14 różnorodnych pomiarów. Poniżej zaprezentujemy niektóre z nich zaczynając od najmniejszych prędkości do największych.

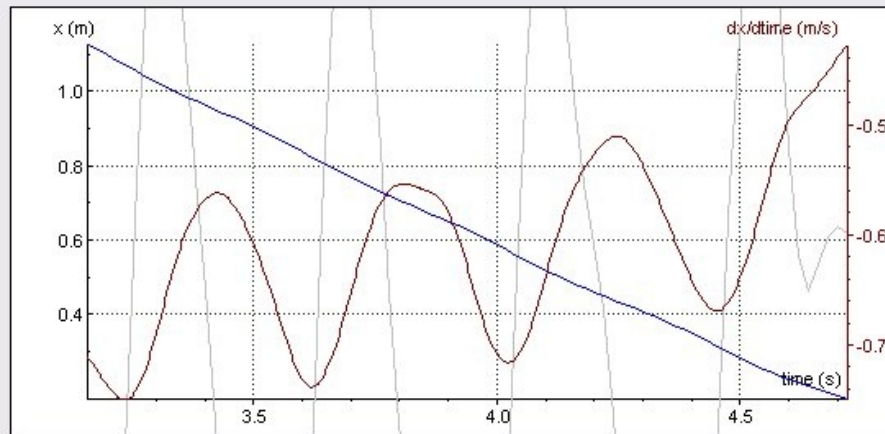


Wykres 1.1

Poniższe dwa wykresy przedstawiają pomiar dla maksymalnej prędkości około 0.56 ms^{-1} i minimalnej około 0.39 ms^{-1} (dla tego samego obrotu). Dla takich prędkości chwilowych maksymalna wartość przyspieszenia bądź opóźnienia wynosi około 1.2 ms^{-2} . Zauważyliśmy także, że przyspieszenie osiąga największą wartość w momencie, gdy obręcz jest mniej więcej w połowie drogi między maksymalną a minimalną prędkością, zatem przyspieszenie powinno przyjmować swe maksymalne i minimalne wartości dla $\theta = 90^\circ$ lub $\theta = 270^\circ$ odnosząc się do Ilustracji 1.



Wykres 1.2



Wykres 2.1

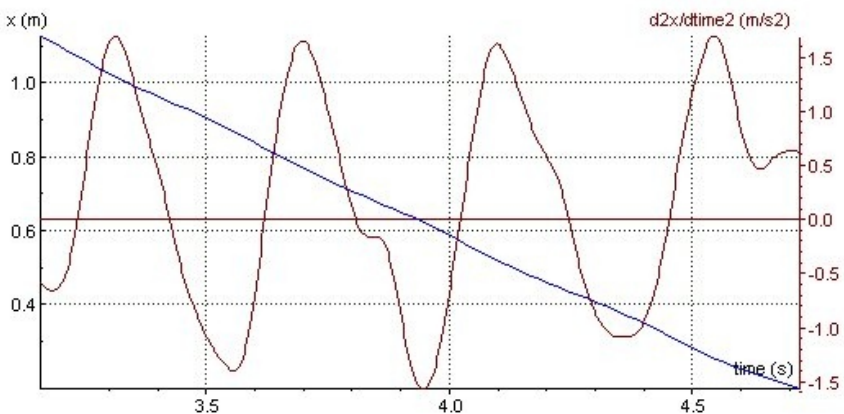
Następne wykresy 2.1 i 2.2 przedstawiają już kolejny pomiar, w którym wyniki są następujące:

$$V_{max} = 0.75 \text{ ms}^{-1}$$

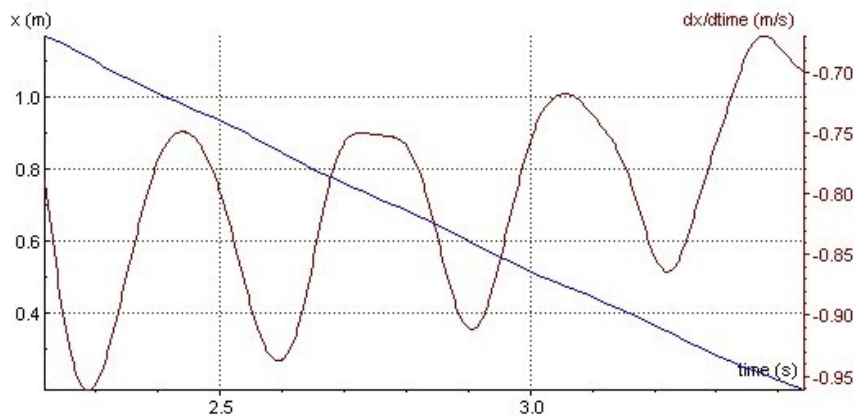
$$V_{min} = 0.56 \text{ ms}^{-1}$$

$$a_{max} = 1.6 \text{ ms}^{-2}$$

Prędkość maksymalna i prędkość minimalna to w przypadku naszego doświadczenia leżące następująco po sobie maksimum i minimum lokalne. Będzie to potem potrzebne do porównania zmian prędkości dla różnych pomiarów. Potwierdza to nasze założenia związane z zależnością maksymalnej prędkości od maksymalnego przyspieszenia.



Wykres 2.2



Wykres 3.1

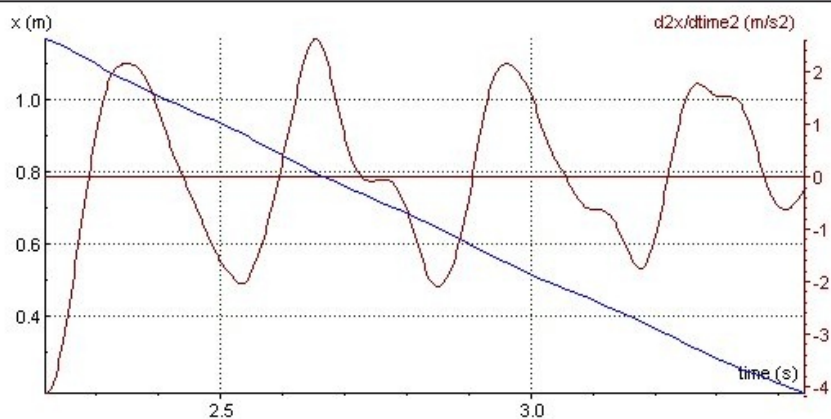
Wykresy 3.1 i 3.2 przedstawiają kolejny pomiar, gdzie:

$$V_{max} = 0.96 \text{ ms}^{-1}$$

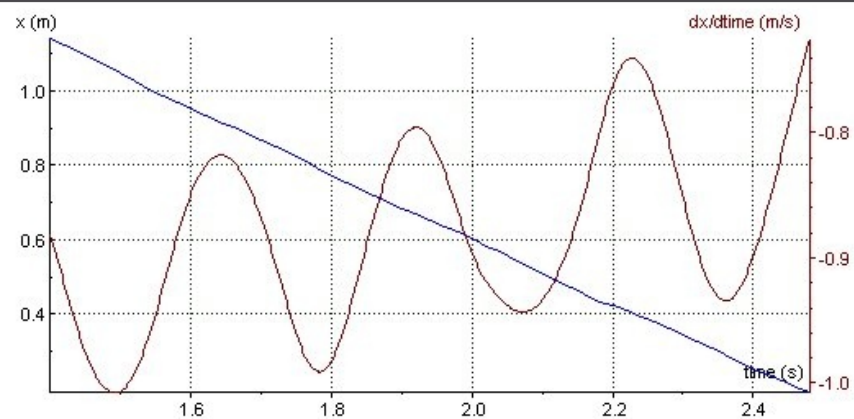
$$V_{min} = 0.75 \text{ ms}^{-1}$$

$$a_{max} = 2.2 \text{ ms}^{-2}$$

Zakłócenia pojawiające się na wykresie zależności przyspieszenia od czasu sugerują pewną niedokładność pomiarów wykonywanych przez urządzenie bądź delikatne nierówności podłoża.



Wykres 3.2



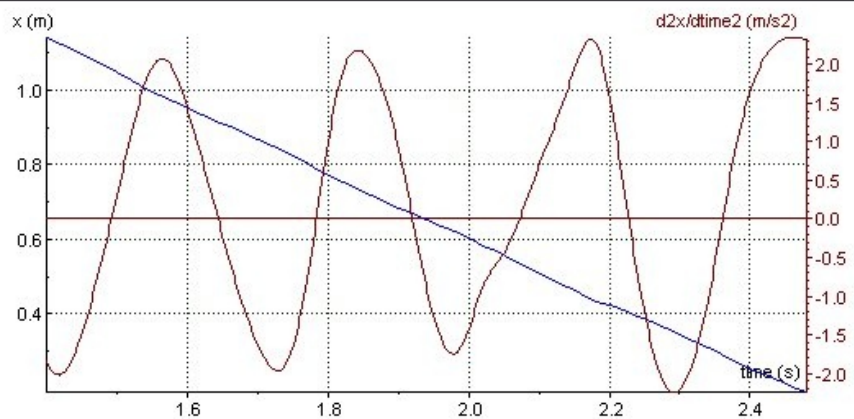
Wykres 4.1

Kolejne wykresy 4.1 i 4.2 prezentują pomiar nie różniący się zbyt wiele od poprzedniego, ale nieco bardziej dokładny i bez

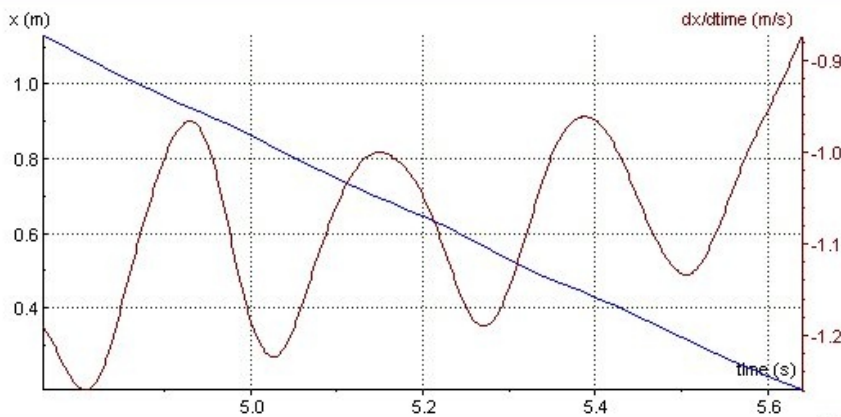
$$V_{max} = 1.05 \text{ ms}^{-1}$$

$$V_{min} = 0.82 \text{ ms}^{-1}$$

$$a_{max} = 2.3 \text{ ms}^{-2}$$



Wykres 4.2



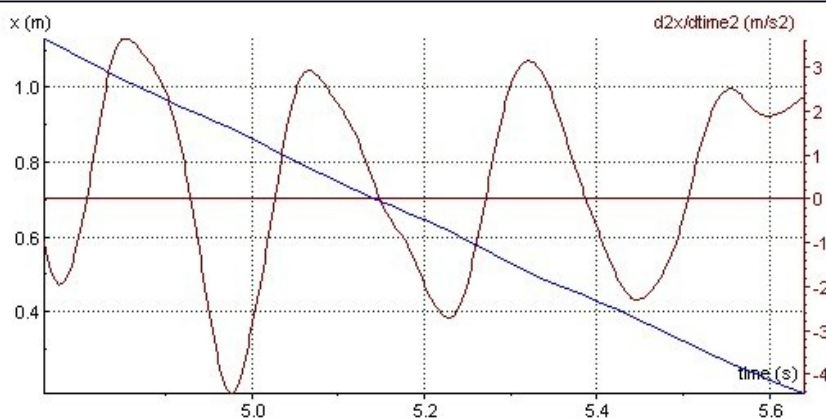
Wykres 5.1

Ostatni zaprezentowany tutaj pomiar dotyczy największej uzyskanej przez nas prędkości podczas doświadczenia. Wyniki są następujące:

$$V_{max} = 1.22 \text{ ms}^{-1}$$

$$V_{min} = 1.00 \text{ ms}^{-1}$$

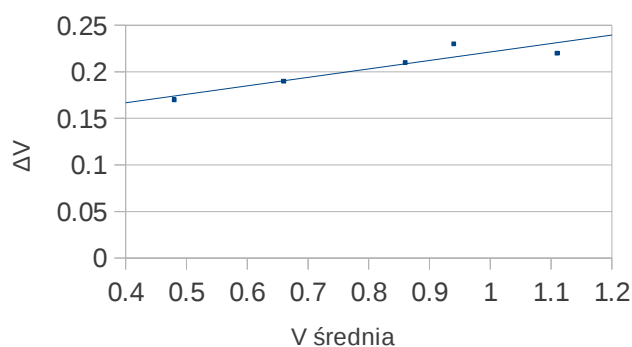
$$a_{max} = 3.0 \text{ ms}^{-2}$$



Wykres 5.2

Wnioski

Powyższe doświadczenie potwierdziło nasze założenie, że ruch obciążonej obręczy jest ruchem niejednostajnym. Zweryfikujemy teraz założenie dotyczące stałości zmiany prędkości niezależnie od średniej prędkości.



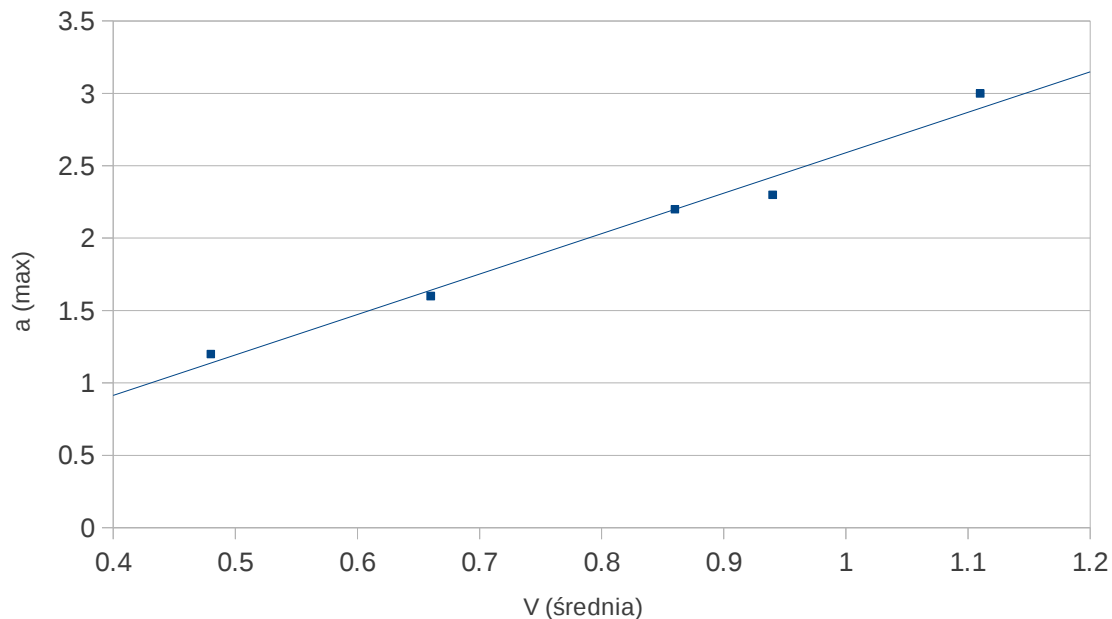
Wykres 6

Wykres 6. wskazuje na tendencję do wzrostu zmiany prędkości wraz ze wzrostem średniej prędkości poruszającej się obręczy. Wy tłumaczeniem może być tarcie toczone, które oddziałuje na toczącą się obręcz. Gdy obręcz toczy się szybciej. Chociaż niezależnie od prędkości siła tarcia jest taka sama, to praca jaką wykonuje będzie miała większy wpływ na spowolnienie ruchu obręczy o najmniejszej prędkości. Poniżej zamieszczamy wzór na tarcie toczone:

$$F_t = \frac{f}{R} \cdot N$$

Jak widać, zarówno promień toczzonego walca, jak i siła nacisku pozostają niezmiennie w naszym eksperymencie, stąd wniosek, że siła tarcia nie ulegnie zmianie. Należy jeszcze zweryfikować ostatnie założenie: „największa maksymalna wartość przyspieszenia będzie osiągnięta dla największych prędkości poruszania się obręczy”. W tym celu zaprezentujemy także wykres, tym razem zależności maksymalnego przyspieszenia od prędkości osiągniętej w danym momencie, która

jest w przybliżeniu średnią arytmetyczną maksymalnej i minimalnej prędkości chwilowej dla danego obrotu obręczy.



Wykres 7

Jak widać, nasze przypuszczenia znalazły potwierdzenie. Podsumowując:

- ruch obciążonej obręczy jest ruchem niejednostajnym, w którym prędkość chwilowa zależy od położenia środka ciężkości
- im większa jest średnia prędkość obręczy, tym większe maksymalne przyspieszenie, które występuje w momencie opadania środka ciężkości
- zmiany prędkości spowodowane unoszeniem i opadaniem środka ciężkości są tym większe im szybciej porusza się obiekt
- tarcie toczne i opór powietrza ma wpływ na spowalnianie ruchu obciążonej obręczy

Bibliografia

http://www.fizykon.org/kinematyka/predkosc_chwilowa.htm

http://pl.wikipedia.org/wiki/Tarcie_toczne

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717708000289>

http://pl.wikipedia.org/wiki/Pr%C4%99dko%C5%9B%C4%87_k%C4%85towa

Willem F.D. Theron - „Analysis of the Rolling Motion of Loaded Hoops”